МИНОБРНАУКИ РОССИИ
АСТРАХАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.Н. ТАТИЩЕВА

СОГЛАСОВАНО	УТВЕРЖДАЮ
Руководитель ОПОП	Заведующий кафедрой ЦТ
Гордеев __________________ И.И. Гордеев	__________________ А.Н. Марьенков
29 июня 2022 г.	29 июня 2022 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ
СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ

Составитель	**Верига А.В., доцент каф. ЦТ, АГУ**
Направление подготовки	**09.04.02 ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ И ТЕХНОЛОГИИ**
Направленность (профиль) ОПОП	**ПРОЕКТИРОВАНИЕ И РАЗРАБОТКА СИСТЕМ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА**
Квалификация (степень)	**магистр**
Форма обучения	**очная**
Год приема	**2022**
Курс	**1**

Астрахань – 2022 г.

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

1.1. Целями освоения дисциплины (модуля) «Специальные главы математики»: формирование у студентов навыков математического мышления, знакомство с математическим аппаратом машинного обучения, использование известных математических законов в новой абстракции машинного обучения.

1.2. Задачи освоения дисциплины (модуля) «Специальные главы математики»:

- научиться применять методы математического анализа, линейной алгебры, матричных преобразований в глубоком обучении нейронных сетей;
- понимать существующие методы глубокого обучения с точки зрения математики$
- разрабатывать методы глубокого обучения применяя математические знания.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ) В СТРУКТУРЕ ОПОП

2.1. Учебная дисциплина «Специальные главы математики» относится к дисциплинам обязательной части учебного плана и осваивается в 1 семестре.

2.2. Для изучения данной учебной дисциплины необходимы следующие знания, умения и навыки, формируемые предшествующими дисциплинами (модулями):

Изучение дисциплины «Специальные главы математики» требует знаний по математическим дисциплинам, изученным на уровне бакалавриата, основы программирования, основы математического моделирования

2.3. Перечень последующих учебных дисциплин (модулей), для которых необходимы знания, умения и навыки, формируемые данной учебной дисциплиной:

Экономико-математические модели управления.

Междисциплинарный проект.

3. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование элементов следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО и ОПОП ВО по данному направлению подготовки:

б) общепрофессиональных (ОПК):

ОПК-1. Способен самостоятельно приобретать, развивать и применять математические, естественнонаучные, социально- экономические и профессиональные знания для решения нестандартных задач, в том числе, в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте.

ОПК-7. Способен разрабатывать и применять математические модели процессов и объектов при решении задач анализа и синтеза распределенных информационных систем и систем поддержки принятия решений.

Таблица 1

Декомпозиция результатов обучения

Код компетенции	Планируемые результаты освоения дисциплины (модуля)		
	Знать (1)	Уметь (2)	Владеть (3)
ОПК 1	ОПК-1.1. Знать: математические, естественнонаучные и социально-экономические методы для использования в профессиональной деятельности.	ОПК-1.2. Уметь: решать нестандартные профессиональные задачи, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте, с применением математических, естественнонаучных, социально-экономических и профессиональных знаний.	ОПК-1.3. Иметь навыки: теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте.

ОПК 7	ОПК-7.1. Знать: принципы построения математических моделей процессов и объектов при решении задач анализа и синтеза распределенных информационных систем и систем поддержки принятия решений.	ОПК-7.2. Уметь: разрабатывать и применять математические модели процессов и объектов при решении задач анализа и синтеза распределенных информационных систем и систем поддержки принятия решений.	ОПК-7.3. Иметь навыки: построения математически моделей для реализации успешного функционирования распределенных информационных систем и систем поддержки принятия решений.

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Объём дисциплины (модуля) составляет 5 зачётных единиц, в том числе 28 часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (из них 14 часов – лекции, 14 часов – лабораторные работы), и 152 часа – на самостоятельную работу обучающихся.

Таблица 2

Структура и содержание дисциплины (модуля)

№ п/п	Наименование раздела, темы	Семестр	Контактная работа (в часах)			Самостоят. работа		Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации
			Л	ПЗ	ЛР	КР	СР	
1.	Введение в математику для машинного обучения	1	2				16	Тест «Исследование пространства параметров» Тест «Решение систем уравнений»
2.	Векторы. Нахождение размера вектора, его угла и проекции	1	2				22	Тест «Выполнение некоторых операций над векторами» Тест «Скалярное умножение векторов»
3.	Изменение системы отсчета	1	2				24	Тест «изменение базиса». Тест «Изменение системы отсчета, итоговый тест»
4.	Матрицы, векторы и решение систем уравнений	1	4		10		60	Тест «Использование матриц для преобразования». Тест «Решение линейных уравнений с использованием обратной матрицы» Тест «Умножение неквадратных матриц» Тест «Как нарисовать тень 3D объекта с использованием неквадратных матриц» *Отчет по выполнению ЛР «Проверка матрицы на сингулярность»* *Отчет по выполнению ЛР «Отражающее пространство»* *Отчет по выполнению ЛР «Процесс Грам-Шмидта»*
5.	Собственный вектор, собственное значение.	1	4		4		30	Тест «Характеристические полиномы, собственные значения и собственные векторы» Тест «Диагонализация» *Отчет по выполнению ЛР «ранжирование web-страниц»* Тест «Собственные векторы и собственные значения матриц»
ИТОГО			**14**		**14**		**152**	**экзамен**

Условные обозначения:

Л – занятия лекционного типа; ПЗ – практические занятия, ЛР – лабораторные работы; КР – курсовая работа; СР – самостоятельная работа по отдельным темам

Таблица 3

Матрица соотнесения разделов, тем учебной дисциплины (модуля) и формируемых в них компетенций

Разделы, темы дисциплины	Кол-во часов	Компетенции		
		ОПК 1	ОПК 7	общее количество компетенций
Введение в математику для машинного обучения	18	+		1
Векторы. Нахождение размера вектора, его угла и проекции	24	+		1
Изменение системы отсчета	26	+		1
Матрицы, векторы и решение систем уравнений	74	+	+	2
Собственный вектор, собственное значение.	38	+	+	2
ИТОГО	180			

Краткое содержание каждой темы дисциплины

Тема 1. Введение в математику для машинного обучения

Связь между машинным обучением, линейной алгеброй и векторами/матрицами; векторы параметров; операции с векторами

Тема 2. Векторы. Нахождение размера вектора, его угла и проекции

Модуль вектора и скалярное произведение векторов; скалярное произведение и правило косинуса; проекции, векторные проекции

Тема 3. Изменение системы отсчета.

Базис, векторное пространство, линейная независимость

Тема 4. Матрицы в линейной алгебре.

Объекты, оперирующие векторами. Использование матриц для преобразования пространства; инверсии матриц; решение линейных уравнений с использованием обратной матрицы; правило суммирования Эйнштейна; преобразования базисного набора векторов с помощью матриц; Ортогональные матрицы; Процесс Грама — Шмидта. Вычисление матрицы отображения трехмерного объекта на двумерную плоскость под заданным углом наклона

Тема 5. Собственный вектор, собственное значение.

Особые собственные случаи; Вычисление собственных векторов; Переход на собственный базис. Задача ранжирования web-страниц

5. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРЕПОДАВАНИЮ И ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

5.1. Указания для преподавателей по организации и проведению учебных занятий по дисциплине

Цель проведения лекций – формирование у студентов (магистрантов) некоторой основы для последующего выполнения лабораторных работ, усвоения материала (или углубления знаний) в рамках самостоятельной работы. Содержания лекций должны отвечать следующим основным требованиям:

- изложение материала должно происходить «от простого к сложному», «от известного к неизвестному»;
- соблюдение логичности, четкости и ясности в изложении материала;
- возможность выполнения проблемного изложения, проведения управляемых преподавателем дискуссий, диалога с целью активизации учебной деятельности студентов;
- опора смысловой части лекции на реальные факты, события, явления, статистические дан-

ные (они могут быть взяты из Интернета, иных источников), а также на личный опыт обучающихся;

- тесная связь теоретических положений и выводов по материалам лекций с практикой и будущей профессиональной деятельностью студентов (магистрантов).

Преподаватель, читающий лекционные курсы, должен знать их методическое место в структуре процесса обучения по направлению подготовки в магистратуре.

Лабораторные работы должны сопровождать и поддерживать лекционный курс; обеспечивать закрепление теоретических знаний, выработку необходимых практических умений (навыков) у обучающихся.

Необходимо предусмотреть развитие форм самостоятельной работы, для вывода студентов к моменту завершения изучения курса на необходимый уровень знаний, умений, навыков.

5.2. Указания для обучающихся по освоению дисциплины

В рамках дисциплины «Специальные главы математики» предполагается организация следующих видов работ:

- самостоятельной работы студентов (таблица 4):
- работа с лекционным материалом, учебно-методическим информационным обеспечением;
- подготовка к лабораторно-практическим работам, подготовка отчетов к защите отчетов;
- подготовка к компьютерному тестированию.

В качестве форм и методов контроля внеаудиторной самостоятельной работы используются: электронные отчеты по выполнению лабораторных работ; устный опрос, протоколы компьютерного тестирования.

Самостоятельная работа студентов в рамках изучения дисциплины включает в себя следующее:

- работа с лекционным материалом, в т.ч. закрепление и углубление знаний, полученных на занятиях лекционного типа;
- работа с учебно-методическим информационным обеспечением, размещенным на сайте http://moodle.asu.edu.ru Астраханского государственного университета;
- подготовка к выполнению лабораторных работ на аудиторных занятиях;
- формирование отчетов по лабораторным работам;
- выполнение заданий, переданных студентам для «самостоятельной работы»;
- подготовка студентов к сдаче отчетов по лабораторным работам;
- подготовка к тестированию.

В процессе подготовки к лабораторным занятиям, необходимо обратить особое внимание на самостоятельное изучение рекомендованной литературы. Самостоятельная работа с учебниками, учебными пособиями, научной, справочной литературой, материалами периодических изданий и Интернета является наиболее эффективным методом получения дополнительных знаний, позволяет значительно активизировать процесс овладения информацией, способствует более глубокому усвоению изучаемого материала.

На лекциях рассматриваются математические основы нейронных сетей, использование математических методов в существующих моделях.

Лабораторные работы выполняются студентами с применением ПК и заключаются в выполнении сквозного цикла лабораторных работ. В процессе выполнения лабораторных работ достигаются следующие цели:

- изучаются основные математические методы, применяемые в глубоком обучении;
- формируются практические навыки применения математического аппарата при решении конкретных практических задач;
- формируется навык выявления ошибочных и нештатных ситуаций и реагирования на них.

На лабораторных занятиях студент вначале знакомится с содержанием работы, пользуясь электронными методическими материалами, размещенными на http://moodle.asu.edu.ru, затем выполняет задание и показывает результаты преподавателю. Лабораторные работы, выполняются студентом самостоятельно, возникающие при их выполнении проблемы разрешаются в рамках учебного времени и индивидуальных и групповых консультаций. Для выставления баллов по итогам выполнения ЛР, студенты прикрепляют файлы с выполненными работами и отчеты на образовательный портал.

Лабораторные работы представляют собой код программы на языке Python в котором студенту предлагается дописать пропущенные фрагменты в соответствии с поставленной задачей. Выполненной лабораторная работа считается в том случае, когда весь код после запуска выдает требуемый результат.

Текущая аттестация студентов проводится в форме контрольных работ, представленных в виде компьютерного теста, в ходе которого студент должен подтвердить освоение соответствующего раздела, ответив на вопросы, которые не были разобраны в ходе лекций, но логически выводятся из лекционного материала. Ответы выбираются из предоставленных вариантов. Если вопрос имеет единственный правильный ответ, за него начисляется один балл при правильном выборе. Если вопрос предполагает выбор нескольких правильных вариантов, тогда один балл за ответ начисляется при выборе всех правильных ответов. Тест считается пройденным, если студент набрал 80% баллов из всех возможных.

Работу с информационными источниками целесообразно начать с изучения общих работ по машинному обучению, а также публикаций последних лет (в т.ч. на иностранном языке), в которых содержатся основные вопросы изучаемой проблемы.

Таблица 4

Содержание самостоятельной работы обучающихся

Номер радела (темы)	Темы/вопросы, выносимые на самостоятельное изучение	Кол-во часов	Формы работы
1	Самостоятельная работа «операции с векторами»	16	Изучение теоретического материала, подготовка к тесту.
2	Самостоятельная работа «Нахождение размера вектора, его угла и проекции»	22	Изучение теоретического материала, подготовка к тесту
3	Самостоятельная работа «Базис, векторное пространство, линейная независимость», тест	24	Изучение теоретического материала, подготовка к тесту
4	Самостоятельная работа «преобразования базисного набора векторов с помощью матриц.» Самостоятельная работа «Процесс Грама — Шмидта» ЛР «Проверка матрицы на сингулярность» ЛР «Отражающее пространство» ЛР «Процесс Грама-Шмидта»	60	Изучение теоретического материала, подготовка к тесту. Написание программного кода
5	Собственный вектор, собственное значение. Самостоятельная работа «Вычисление собственных векторов; Переход на собственный базис». ЛР «ранжирование web-страниц»	30	Изучение теоретического материала. Написание программного кода

5.3. Виды и формы письменных работ, предусмотренных при освоении дисциплины (модуля), выполняемые обучающимися самостоятельно

Отчет по лабораторным работам.

Результатом работы, выполняемой студентами, является электронный отчет по выполнению лабораторной работы, тематика которых представлена в таблице 4,

Электронный отчет представляет собой файл формата Jupiter Notebook, содержащий программный код, результаты выполнения программы и текстовые пояснения. Код должен быть исполняемым и его запуск должен приводить к тем же результатам, что и в предоставленном отчете. Файл передается на проверку преподавателю путем загрузки на ресурс http://moodle.asu.edu.ru в соответствующий заданию раздел.

Задания к лабораторным занятиям размещены на образовательном портале http://moodle.asu.edu.ru. Рекомендуется заранее ознакомиться с темой, основными вопросами, рекомендациями, требованиями к представлению отчета и критериями оценивания заданий.

6. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

При реализации различных видов учебной работы по дисциплине могут использоваться электронное обучение и дистанционные образовательные технологии.

6.1. Образовательные технологии

В рамках реализации компетентностного подхода в соответствии с требованиями ФГОС высшего образования в учебном процессе предусмотрены активные и интерактивные формы проведения занятий.

Цели обучения по дисциплине достигаются путем сочетания контактной (аудиторной) со студентами, включая проведение лекционных занятий, лабораторных занятий на ЭВМ и организации самостоятельной работы обучающихся вне рамок аудиторных занятий.

Лекционные занятия организуются с применением традиционных и инновационных технологий организации учебной деятельности. На лекциях рассматриваются вопросы теоретического характера, обеспечивается демонстрационная (визуальная) поддержка изложения курса.

Лабораторные работы в рамках аудиторных занятий выполняются студентами под руководством преподавателя с применением ЭВМ; ориентированы на формирование компетентностей, предусмотренных программой учебного курса.

На лабораторных занятиях студенты сначала знакомятся с содержанием работы, затем задания выполняются под руководством преподавателя, после этого оформляются отчетные материалы по работам. При необходимости завершение лабораторных работ, а также доработка отчетов по ним, выполняются студентами в рамках самостоятельной работы во внеаудиторное время.

Учебные занятия по дисциплине могут проводиться с применением информационно-телекоммуникационных сетей при опосредованном (на расстоянии) интерактивном взаимодействии обучающихся и преподавателя в режимах on-line в формах: видеолекций, лекций-презентаций, видеоконференции, собеседования в режиме чат, форума, чата, выполнения виртуальных практических и/или лабораторных работ и др.

6.2. Информационные технологии

- использование возможностей интернета в учебном процессе (использование сайта преподавателя (рассылка заданий, предоставление выполненных работ, ответы на вопросы, ознакомление обучающихся с оценками и т. д.));
- использование электронных учебников и различных сайтов (например, электронных библиотек, журналов и т. д.) как источников информации;
- использование возможностей электронной почты преподавателя;
- использование средств представления учебной информации (электронных учебных пособий и практикумов, применение новых технологий для проведения очных (традиционных) лекций и семинаров с использованием презентаций и т. д.);
- использование интегрированных образовательных сред, где главной составляющей являются не только применяемые технологии, но и содержательная часть, т. е. информационные ресурсы (доступ к мировым информационным ресурсам, на базе которых строится учебный процесс);
- использование виртуальной обучающей среды (LMS Moodle «Цифровое обучение») или иных информационных систем, сервисов и мессенджеров.

6.3. Программное обеспечение, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

Таблица 5.
Программное обеспечение

Наименование программного обеспечения (программного средства)	Назначение программного средства
Adobe Reader	Программа для просмотра электронных документов
Платформа дистанционного обучения LMS Moodle	Виртуальная обучающая среда
Mozilla FireFox	Браузер
Microsoft Office 2013, Microsoft Office Project 2013, Microsoft Office Visio 2013	Пакет офисных программ
7-zip	Архиватор
Microsoft Windows 7 Professional	Операционная система
Kaspersky Endpoint Security	Средство антивирусной защиты
KOMPAS-3D V13	Создание трехмерных ассоциативных моделей отдельных элементов и сборных конструкций из них
Blender	Средство создания трехмерной компьютерной графики
Cisco Packet Tracer	Инструмент моделирования компьютерных сетей
Google Chrome	Браузер
Far Manager	Файловый менеджер
Notepad++	Текстовый редактор
OpenOffice	Пакет офисных программ
Opera	Браузер

6.3.2. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

Для самостоятельного поиска учебной литературы, научных статей, монографий студентам рекомендуется пользоваться сайтом http://elibrary.ru. При этом необходимо ориентироваться на литературу, находящуюся в свободном доступе.

Для самостоятельного поиска патентов на изобретения и полезные модели, зарегистрированного программного обеспечения различного назначения студентам рекомендуется пользоваться сайтом www1.fips.ru. При этом необходимо иметь в виду, что изобретения «на способ» могут содержать в себе описания алгоритмов некоторых действий, в т.ч. относящихся к построению и использованию «Моделей информационных процессов и систем».

Для изучения текстов нормативно-правовой документации студентам рекомендуется пользоваться информационно-справочной системой «Консультант Плюс», установленной на сервере Астраханского государственного университета. Кроме того, сокращенные версии юридических информационно-справочных систем на лазерных дисках студенты обычно могут бесплатно получить в библиотеке АГУ (в главном корпусе). Дополнительной возможностью (с 2020г) является получение в библиотеке АГУ карточек для доступа к «Онлайн-версии КонсультантПлюс:Студент» – такие карточки содержат индивидуальные пароли для получения «кода доступа» к ресурсу. Нормативно-правовая информация может, в частности, использоваться для определения ограничений по допустимым параметрам при построении «Моделей информационных процессов и систем».

7. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

7.1. Паспорт фонда оценочных средств

При проведении текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине «*Специальные главы математики*» проверяется сформированность у обучающихся компетенций, указанных в разделе 3 настоящей программы. Этапность формирования данных компетенций в процессе освоения образовательной программы определяется последовательным освоением дисциплин (модулей) и прохождением практик, а в процессе освоения дисциплины – последовательным достижением результатов освоения содержательно связанных между собой разделов, тем.

Таблица 5

Соответствие разделов, тем дисциплины, результатов обучения по дисциплине и оценочных средств

№ п/п	Контролируемые разделы, темы дисциплины	Код контролируемой компетенции (компетенций)	Наименование оценочного средства
1	Введение в математику для машинного обучения	ОПК-1	Тест «Исследование пространства параметров» Тест «Решение систем уравнений»
3	Векторы. Нахождение размера вектора, его угла и проекции	ОПК-1	Тест «Выполнение некоторых операций над векторами» Тест «Скалярное умножение векторов»
4	Изменение системы отсчета.	ОПК-1	Тест «Изменение базиса». Тест «Изменение системы отсчета, итоговый тест»
5	Матрицы в линейной алгебре.	ОПК-1, ОПК-7	Тест «Использование матриц для преобразования». Тест «Решение линейных уравнений с использованием обратной матрицы» Тест «Умножение неквадратных матриц» Тест «Как нарисовать тень 3D объекта с использованием неквадратных матриц» Тест «Составить матрицу изображения тени 3D объекта на вертикальной стене с переменным вектором направления света» Отчет по выполнению ЛР «Проверка матрицы на сингулярность» Отчет по выполнению ЛР «Отражающее пространство» Отчет по выполнению ЛР «Процесс Грам-Шмидта»
6	Собственный вектор, собственное значение.	ОПК-1, ОПК-7	Тест «Характеристические полиномы, собственные значения и собственные векторы» Тест «Диагонализация» Отчет по выполнению ЛР «Ранжирование web-страниц» Тест «Собственные векторы и собственные значения матриц»

7.2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций, описание шкал оценивания

Тестирование проходит в режиме онлайн в виртуальной обучающей среде LMS Moodle, итоговый балл за тест выставляется в соответствии с установленной оценкой за тест по таблице 6. Перевод баллов выполняется автоматически с учетом следующих критериев:

За еженедельные тесты и лабораторные во время обучения в сумме максимальная оценка – 50 баллов.

За ответ на 4 вопроса экзаменационного теста в сумме: 40 баллов.

За выполнение экзаменационного задания +10 баллов

Оценивание лабораторных работ производится комплексно с учетом степени подготовки студента к выполнению работы, объема выполненной работы на занятии и оформлении отчета в соответствии с перечисленными критериями. В зависимости от выставленного максимального балла (таблица 6) перерасчет за каждый отчет ЛР начисляемых баллов производится автоматически.

Таблица 6

Критерии оценки результатов сформированности компетенций

Количество баллов	Критерии

3	– содержание отчета соответствуют номеру варианта, выданного преподавателем – задания выполнены правильно – задания выполнены в полном объеме – информация изложена достоверно, обоснованно, логично, последовательно – продемонстрировано отличное владение инструментальными средствами обработки информации – отчет представлен в установленные сроки
2	– содержание отчета соответствуют номеру варианта, выданного преподавателем – задания выполнены правильно, но присутствуют некоторые неточности – задания выполнены в полном объеме – продемонстрировано хорошее владение инструментальными средствами обработки информации – отчет представлен в установленные сроки
1	– задания выполнены правильно, но выбраны не все верные варианты ответов – задания выполнены в объеме не менее 60% – информация изложена достоверно, но есть нарушения в последовательности и логичности ее изложения – информация представлена не иллюстративно – продемонстрировано удовлетворительное владение инструментальными средствами обработки информации – отчет представлен в установленные сроки
0	– содержание отчета не соответствует номеру варианта, выданного преподавателем – задания выполнены с ошибками – задания выполнены в объеме менее 60% – продемонстрировано неудовлетворительное владение инструментальными средствами обработки информации – отчет не представлен, или представлен с нарушением срока сдачи без уважительной причины

7.3. Контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

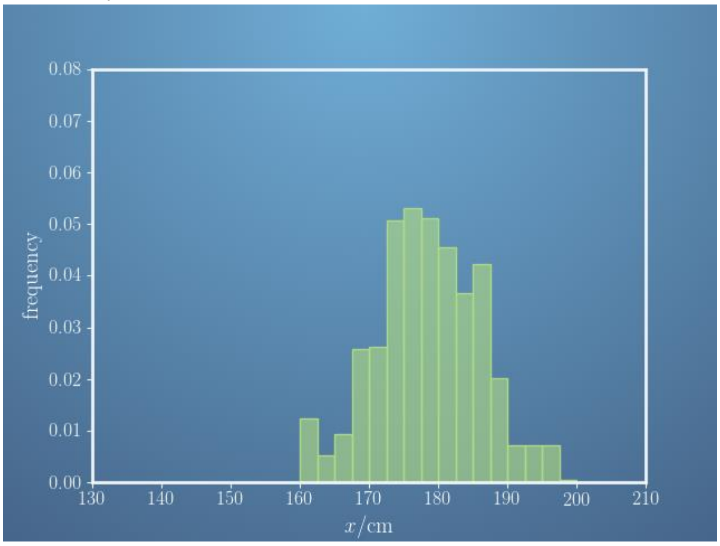
Полный комплект заданий размещен в виртуальной обучающей среде LMS Moodle в разделе «Специальные главы математики».

Тема 1. Введение в математику для машинного обучения

Тест «Исследование пространства параметров»

Вопрос 1

Задача, на которой мы сосредоточимся в этом упражнении, - это распределение роста в популяции. Если мы соберем сведения о росте людей в популяции, мы можем получить распределение, подобное этому:



Эта гистограмма показывает, насколько вероятно, что кто-либо из участников находится в определенном диапазоне высоты.
Эта гистограмма также может быть представлена вектором, то есть списком чисел. В этом случае мы регистрируем частоту людей с ростом в маленьких группах с интервалами 2,5 см, то есть между 150 см и 152,5 см, между 152,5 см и 155 см и так далее. Мы можем определить это как вектор f с компонентами,

$$f = \begin{bmatrix} f_{150.0,152.5} \\ f_{152.5,155.0} \\ f_{155.0,157.5} \\ f_{157.5,160.0} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Эти векторные компоненты - размеры каждого столбца гистограммы.
Из следующих утверждений выберите все истинные.
Выберите один или несколько ответов:

☐ В частотном векторе f имеется не менее 10 элементов

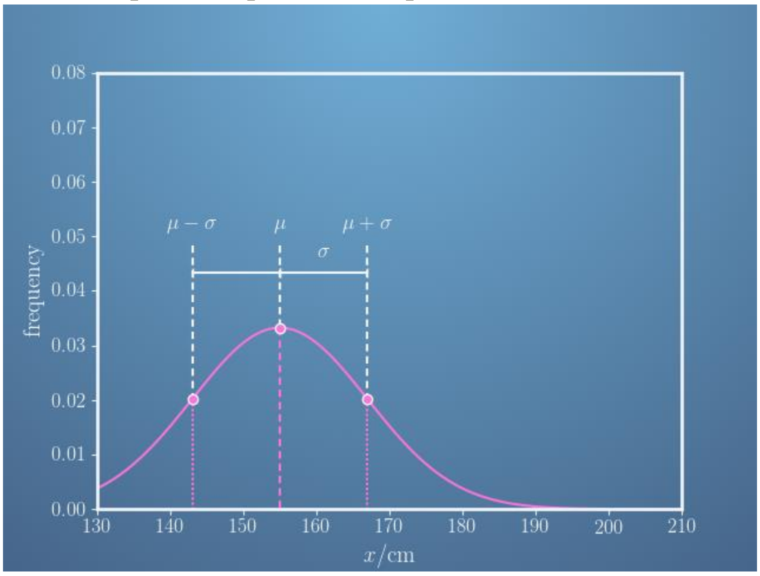
☐ Ни одно из этих утверждений

☐ Если другая выборка будет произведена в тех же условиях, частоты должны быть примерно одинаковыми.

☐ Если другая выборка будет произведена в тех же условиях, частоты будут точно такими же.

☐ В мире не бывает людей с ростом ниже 160 см.

Вопрос 2
Одна из задач машинного обучения - подгонка модели к данным, для получения базового распределения.
Для распределения ростов в популяции модель, которую мы можем использовать для прогнозирования частот, представляет собой нормальное (или гауссовское) распределение.
Это модель для колоколообразной кривой, которая выглядит так:



у нее довольно сложная формула:

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

точная форма которой не важна, но зависит от двух параметров: среднего значения μ и стандартного отклонения σ это ширина колокола (измеренная по среднему значению), Мы можем поместить эти два параметра в вектор:

$$p = \begin{bmatrix} \mu \\ \sigma \end{bmatrix},$$

Выберите вектор р лучше всего описывающий изображенное распределение

Выберите ответ:

○ $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 155 \\ 3 \end{bmatrix}$ ○ $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 143 \\ 167 \end{bmatrix}$ ○ $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 167 \\ 24 \end{bmatrix}$ ○ $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 167 \\ 12 \end{bmatrix}$

○ $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 155 \\ 12 \end{bmatrix}$

Тест «Решение систем уравнений»

Вопрос 1

Решение системы уравнений - это процесс нахождения значений переменных (здесь *x* и *y*), которые удовлетворяют системе уравнений. Давайте начнем с простейшей системы уравнений, где мы уже знаем все переменные, кроме одной:

$$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x = 4 \end{cases}$$

подставьте значение *x* в первое уравнение, чтобы найти *y*, затем выберите правильные значения *x* и *y* ниже.

Выберите ответ:

○ x=4, y=−10 ○ x=4, y=10 ○ x=4, y=14

Вопрос 2

Первой целью при решении простых одновременных уравнений должно быть выделение одной из переменных. Например, попробуйте вычесть второе уравнение из первого, чтобы решить следующую систему:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases}$$

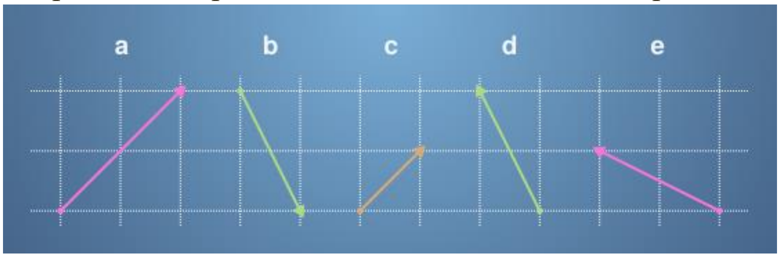
Выберите ответ:

○ x=5, y=4 ○ x=3, y=1 ◉ x=7, y=7 ○ x=1, y=−4

Тема 2. Векторы. Нахождение размера вектора, его угла и проекции

Тест «Выполнение некоторых операций над векторами»

В следующих пяти вопросах векторы a, b, c, d и e - это те, что изображены на этой диаграмме:



Вопрос 1

Стороны каждого квадрата на сетке имеют длину 1. Каково числовое представление вектора a?

Выберите ответ:

○ $\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$ ○ $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ ○ $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ ○ $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$

Вопрос 2

Какой вектор на диаграмме соответствует значению $\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$?

Выберите ответ:

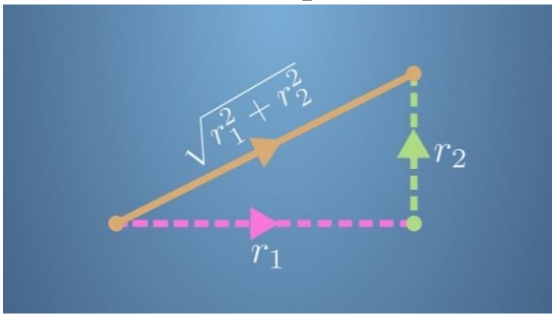
○ вектор **b** ○ вектор **e** ○ вектор **a** ○ вектор **c** ○ вектор **d**

Тест «Скалярное умножение векторов

Вопрос 1

Здесь вы выполните некоторые упражнения с использованием скалярного произведения. Мы видели, что размер вектора с двумя компонентами рассчитывается с использованием теоремы Пифагора, например, следующая диаграмма показывает, как мы вычисляем размер оранжевого вектора

$$r = \begin{bmatrix}r_1\\r_2\end{bmatrix}:$$



Фактически, это определение может быть распространено на любое количество измерений; размер вектора - это квадратный корень из суммы квадратов его составляющих. Используя эту информацию, каков найти размер вектора

$$s = \begin{bmatrix}1\\3\\4\\2\end{bmatrix}?$$

Выберите ответ:

○ $|s| = 30$ ○ $|s| = 10$ ○ $|s| = \sqrt{30}$ ○ $|s| = \sqrt{10}$

Вопрос 2

Вспомните определение скалярного произведения из лекции. Для двух n-мерных векторов: $a.b=a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n$ чему равно скалярное произведение векторов r и s

$$\mathrm{r} = \begin{bmatrix}-5\\3\\2\\8\end{bmatrix}, \mathrm{s} = \begin{bmatrix}1\\2\\-1\\0\end{bmatrix}?$$

Выберите ответ:

○ $\mathrm{r.s} = -1$ ○ $r.s = \begin{bmatrix}-4\\5\\1\\9\end{bmatrix}$ ○ $\mathrm{r.s} = \begin{bmatrix}-5\\6\\-2\\0\end{bmatrix}$ ○ $\mathbf{r.s} = 1$

Тема 3. Изменение системы отсчета

Тест «Изменение базиса»

Вопрос 1

Даны векторы, описанные в стандартном базисе: $v = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}, b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Чему равен *v* в базисе b_1 и b_2? Известно, что b_1 и b_2 ортогональны друг другу.

Выберите один ответ:

○ $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ ○ $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ ○ $\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ ◉ $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Вопрос 2

даны векторы, описанные в стандартном базисе:

$$v = \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \end{bmatrix}, b1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} b2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Чему равен *v* в базисе b_1 и b_2? Известно, что b_1 и b_2 ортогональны друг другу.

Выберите один ответ:

○ $\begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{11}{5} \end{bmatrix}$ ○ $\begin{bmatrix} \frac{11}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$ ○ $\begin{bmatrix} \frac{-2}{5} \\ \frac{11}{5} \end{bmatrix}$ ○ $\begin{bmatrix} 2 \\ 11 \end{bmatrix}$

Тест «Изменение системы отсчета»

Вопрос 1

Корабль движется со скоростью, заданной как $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, по реке с течением, заданным как $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, относительно некоторых координатных осей.

Какова скорость корабля в направлении течения?

○ $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$, ○ $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ ○ $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ ○ $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

Вопрос 2

Мяч движется со скоростью, заданной как $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, а ветер дует в направлении, указанном как $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$, относительно некоторых координатных осей. Каково значение скорости мяча в направлении ветра?

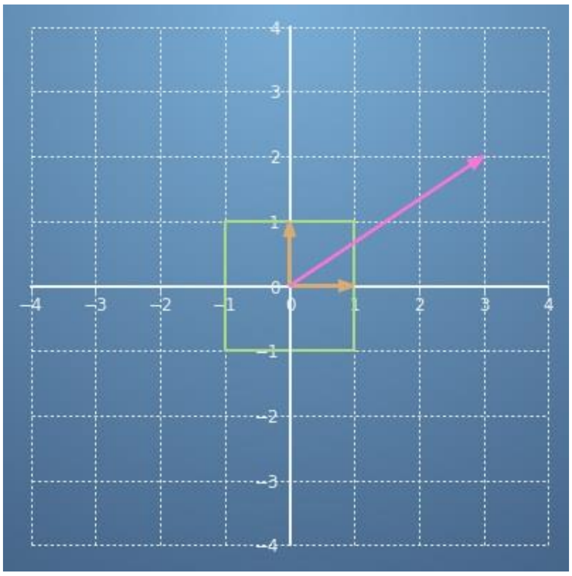
Выберите один ответ:

◉ $\frac{-2}{5}$ ○ $\frac{2}{5}$ ○ $\frac{5}{2}$ ○ $\frac{-5}{2}$

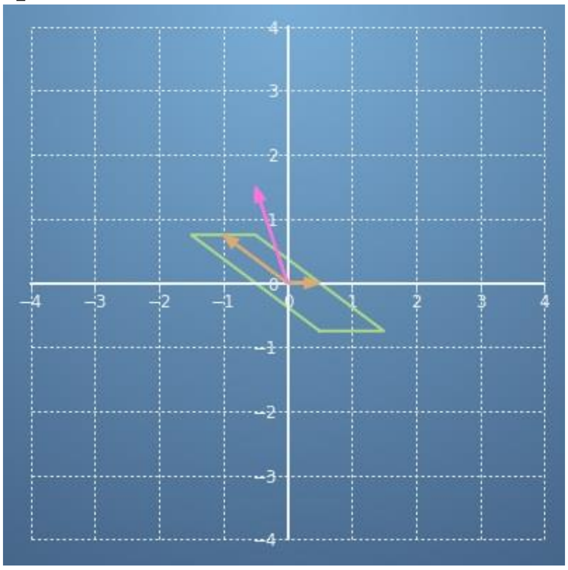
Тема 4. Матрицы, векторы и решение систем уравнений

Тест «Использование матриц для преобразования».

У нас есть два единичных вектора (оранжевые) и еще один вектор, r = $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ (розовый), изначально они выглядят так:



Матрица $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ трансформирует базис и вектор r:



Вопрос 1

В какой новый вектор r' матрица A преобразует r? А именно, чему будет равно следующее выражение?

$$Ar = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

○ $\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ ○ $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$ ○ $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ○ $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

Вопрос 2

Используем ту же матрицу $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ из первого вопроса:

Введите значения s_1 и s_2 вектора $s=A\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$

$s_1 =$ ☐ $s_2 =$ ☐

Тест «Решение линейных уравнений с использованием обратной матрицы»

Вопрос 1

Вы идете в магазин в понедельник и покупаете 1 яблоко, 1 банан и 1 морковь; Общая сумма покупки составляет 15 евро. Во вторник вы покупаете 3 яблока, 2 банана, 1 морковь, все за 28 евро. Затем в среду 2 яблока, 1 банан, 2 моркови, по 23 евро.

то есть,

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$

$A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 28 \\ 23 \end{bmatrix}$, Где a,b,c - цены на яблоки, бананы и морковь.

Найдите обратную матрицу A^{-1}

○ $\begin{bmatrix} -1.5 & 0.5 & 0.5 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$ ○ $\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \\ -1 & -1 & 0.5 \end{bmatrix}$ ○ $\begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 & 0.5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0.5 \end{bmatrix}$ ○ $\begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 & 0.5 \\ 2 & 1.5 & 0.5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Вопрос 2

Используя обратную матрицу, найденную вами в предыдущем вопросе, найдите вектор цен $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

○ $\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ ○ $\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$ ○ $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ ○ $\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$

Тест «Умножение неквадратных матриц»

Вопрос 1

В лекции мы видели соглашение об суммировании Эйнштейна, в котором суммируем любые повторяющиеся индексы. В традиционных обозначениях мы могли бы написать, например,

$$\sum_{j=1}^{3} A_{ij} v_j = A_{11} v_1 + A_{12} v_2 + A_{13} v_3$$

С соглашением суммирования Эйнштейна мы можем избежать большой сигмы и записать это как $A_{ij} v_j$. Мы знаем, что суммируем по j, потому что оно появляется дважды.

Мы увидели, что, держа в голове этот тип обозначений, легче умножать неквадратные матрицы. Например, рассмотрим матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

И помните, что в A_{ij} первый индекс i представляет номер строки, а второй индекс j - номер столбца. Например, $A_{12}=2$.

Определим матрицу $C=AB$. Тогда по соглашению Эйнштейна $C_{mn} = A_{mj} B_{jn}$. Используя правило суммирования Эйнштейна, вычислите $C_{21} = A_{2j} B_{j1}$.

Выберите один ответ:

○ $C_{21} = 3$ ○ $C_{21} = 6$ ○ $C_{21} = 4$ ○ $C_{21} = 5$

Вопрос 2

Мы можем использовать тот же метод для вычисления каждого элемента $C = AB$. Делая так, мы видим, что мы умножаем строки A на столбцы B точно так же, как и для квадратных матриц. Фактически, мы можем перемножить любые матрицы, если слагаемые, по которым мы суммируем, имеют одинаковое количество элементов. Например, есть одинаковое количество значений для j в $C_{mn}=A_{mj}B_{jn}$. Полученная матрица C будет иметь столько же строк, сколько A и столько же столбцов, сколько B.

Для тех же матриц, что и раньше,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

чему будет равно их произведение C = AB?

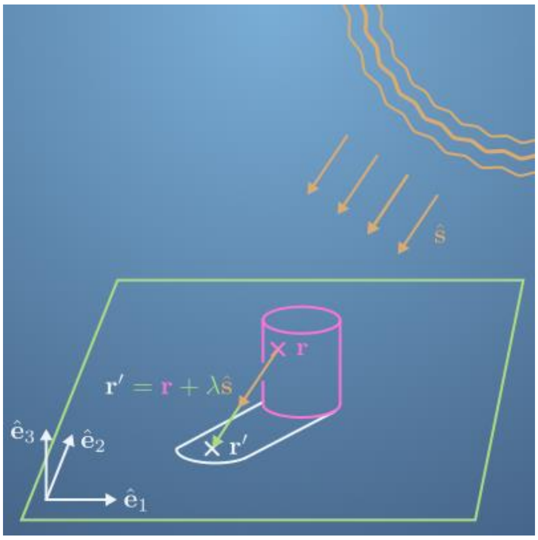
Выберите один ответ:

- $C = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$
- $C = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$
- $C = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$
- $C = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

Тест «Как нарисовать тень 3D объекта с использованием неквадратных матриц»

Вопрос 1

Тени - преобразование, уменьшающее количество измерений. Трехмерные объекты отбрасывают тени на двумерные поверхности. Рассмотрим пример построения теней с помощью линейной алгебры.



Солнце достаточно далеко, чтобы фактически все его лучи шли параллельно друг другу. Мы опишем их направление единичным вектором $\hat{s}$. Мы можем описать трехмерные координаты точек на объектах в нашем пространстве с помощью вектора r. Объекты будут отбрасывать тень на землю в точке r' на пути, по которому бы прошел луч света, если бы он не был перекрыт в точке r, то есть $r' = r + \lambda\hat{s}$.

Земля находится на $r'_3=0$. Используя скалярное произведение $r'.\widehat{e_3} = 0$, мы можем получить выражение $r'.\widehat{e_3} + \lambda s_3 = 0 \ (s_3 = \hat{s}.\widehat{e_3})$.

Первым делом надо выразить λ и подставить его в выражение для r', чтобы получить r' через r.

Выберите один ответ:

- $r' = r + \hat{s}(r.\widehat{e_3})/s_3$
- $r' = r + \hat{s}$

- $r' = r - \hat{s}$
- $r' = r - \hat{s}(r.\hat{e_3})/s_3$

Вопрос 2.

Из предыдущего ответа вы видно, что r' можно записать как линейное преобразование r. Это означает, что мы можем написать $r'=Ar$ для некоторой матрицы A. Если переписать полученное выражение с использованием нотации Эйнштейна, будет легче найти эту матрицу. Какие из приведенных ниже ответов соответствуют выражению, найденному в первом вопросе? (Выбрать все подходящие)

- [ ] $r_i' = \left(I_{ij} - s_i[\hat{e_3}]_j/s_3\right)r_j$
- [ ] $r_i' = \left(I_{ij} - s_i[\hat{e_3}]_j/s_3\right)r_j$
- [ ] $r_i' = r_i - s_i[\hat{e_3}]_j r_j/s_3$
- [ ] Здесь нет ни одного правильного варианта.
- [ ] $r_i' = r_i - s_i r_3/s_3$

Лабораторная работа «Проверка матрицы на сингулярность»

В этом задании вы напишите функцию, которая будет проверять перед вычислением матрицы 4×4, не будет ли она сингулярной, то есть, существует ли к ней инверсия.

Используйте метод преобразования матрицы к эшелонированной по строкам форме и проверки, если это не удастся, оставив нули, которые нельзя удалить на главной диагонали. Не беспокойтесь, если вы раньше не программировали, фреймворк для функции уже написан. В коде отмечены места, где надо внести изменения. Первые две строки уже написаны, можно использовать их как подсказку, чтобы сделать последние две.

Матрицы в Python

В пакете *numpy* в Python индексация матриц начинается с нуля для самого верхнего столбца и самой левой строки. Т.е. матричная структура выглядит так:

```
A[0, 0]  A[0, 1]  A[0, 2]  A[0, 3]
A[1, 0]  A[1, 1]  A[1, 2]  A[1, 3]
A[2, 0]  A[2, 1]  A[2, 2]  A[2, 3]
A[3, 0]  A[3, 1]  A[3, 2]  A[3, 3]
```

Вы можете получить доступ к значению каждого элемента в отдельности, используя

```
A[n, m]
```

который даст n-ую строку и m-й столбец (начиная с нуля).

Вы также можете получить доступ ко всей строке одновременно, используя

```
A[n]
```

как вы увидите, это будет полезно при расчете линейных комбинаций строк.

```
import numpy as np

# Наша функция будет проходить через матрицу, изменяя каждую строку так, чтобы привести матрицу к эшелонированной форме.
# Если в какой-то момент она не сможет поставить 1 в главную диагональ,
# мы вернем значение True, в противном случае мы вернем False.
# Эту функцию изменять не надо.

def isSingular(A) :
    B = np.array(A, dtype=np.float_) #  Делает B как копию матрицы A, так как мы будем менять ее значения.
    try:
        fixRowZero(B)
        fixRowOne(B)
```

```
        fixRowTwo(B)
        fixRowThree(B)
    except MatrixIsSingular:
        return True
    return False

# Следующая строка определяет наш флаг ошибки, когда что-то идет не так, и это
значит матрица сингулярная.
# Нет необходимости редактировать эту строку.
class MatrixIsSingular(Exception): pass
# Для Row Zero все, что нам нужно, это первый элемент, равный 1.
# Мы разделим строку на значение A [0, 0].
# Однако, если A [0, 0] равно 0, это доставит нам неприятности, поэтому сначала
мы ее проверим на ноль,
# и если это так,  перед делением мы прибавим одну из нижних строк к первой.
# Будем повторять проверку для каждого ряда снизу, пока деление не станет возмож-
ным. Если так и не найдем нужную строку, значит, матрица сингулярна
# Нет необходимости редактировать эту функцию.

def fixRowZero(A):
    if A[0,0] == 0 :
        A[0] = A[0] + A[1]
    if A[0,0] == 0 :
        A[0] = A[0] + A[2]
    if A[0,0] == 0 :
        A[0] = A[0] + A[3]
    if A[0,0] == 0 :
        raise MatrixIsSingular()
    A[0] = A[0] / A[0,0]
    return A

# Сначала мы установим элементы под главной диагональю в ноль, то есть A [1,0].
# теперь надо, чтобы элемент на диагонали был равен единице, и мы разделим строку
на значение A [1, 1].
# Опять же, нам нужно проверить, не ноль ли это.
# Если это так, мы прибавим нижнюю строку и повторим установку поддиагональных
элементов в ноль.
# Нет необходимости редактировать эту функцию.
def fixRowOne(A) :
    A[1] = A[1] - A[1,0] * A[0]
    if A[1,1] == 0 :
        A[1] = A[1] + A[2]
        A[1] = A[1] - A[1,0] * A[0]
    if A[1,1] == 0 :
        A[1] = A[1] + A[3]
        A[1] = A[1] - A[1,0] * A[0]
    if A[1,1] == 0 :
        raise MatrixIsSingular()
    A[1] = A[1] / A[1,1]
    return A

# Это первая функция, которую вы должны выполнить.
# Следуйте инструкциям внутри функции при каждом комментарии
def fixRowTwo(A) :
    # Вставьте код ниже, чтобы установить поддиагональные элементы второй строки
в ноль

    # Далее мы проверим, что диагональный элемент не равен нулю.
    if A[2,2] == 0 :
        # Вставьте код ниже, который добавляет нижнюю строку в строку 2.

        # повторите ваш код, который устанавливает поддиагональные элементы на
ноль.
```

```
    if A[2,2] == 0 :
        raise MatrixIsSingular()
    # установите диагональный элемент в единицу, разделив всю строку на этот эле-
мент.

    return A

# Вы также должны сами выполнить эту функцию
# Следуйте инструкциям внутри функции.
def fixRowThree(A) :
    # Вставьте код ниже, чтобы установить субдиагональные элементы строки три в
ноль.



    # Завершите оператор if, чтобы проверить, равен ли диагональный элемент нулю.
    if :
        raise MatrixIsSingular()
    # Преобразуйте строку, чтобы установить диагональный элемент в единицу.

    return A
```

Проверьте свой код перед отправкой

Чтобы проверить код, который вы написали выше, запустите ячейку (выберите ячейку выше, затем нажмите кнопку воспроизведения [▶ |] или нажмите Shift-Enter). Затем вы можете использовать приведенный ниже код для проверки вашей функции. Эта ячейка не оценивается; можете изменять и запускать ее сколько угодно.

Попробуйте свой код на сложных тестовых случаях!

```
A = np.array([
        [2, 0, 0, 0],
        [0, 3, 0, 0],
        [0, 0, 4, 4],
        [0, 0, 5, 5]
    ], dtype=np.float_)
isSingular(A)

A = np.array([
        [0, 7, -5, 3],
        [2, 8, 0, 4],
        [3, 12, 0, 5],
        [1, 3, 1, 3]
    ], dtype=np.float_)
fixRowZero(A)

fixRowOne(A)

fixRowTwo(A)

fixRowThree(A)
```

Лабораторная работа «Отражающее пространство»

В этом задании вы напишете функцию Python, которая будет генерировать матрицу преобразования для отражения векторов в произвольно наклоненном зеркале. Основываясь на последнем задании, где вы написали код для построения ортонормированного базиса, охватывающего набор входных векторов, здесь вы возьмете матрицу, которая в этом базисе принимает простую форму, и превратите ее в наш начальный базис. Вспомните из последней лекции: $T = E\,T_E\,E^{-1}$

Вы напишите функцию, которая будет строить эту матрицу. Это задание не является концептуально сложным, но она создаст и протестирует вашу способность выражать математические идеи в коде. Таким образом, ваше окончательное представление кода будет относительно коротким, но вы получите немного знаний о том, как его написать.

```
# PACKAGE
# Run this cell first once to load the dependancies.
import numpy as np
from numpy.linalg import norm, inv
from numpy import transpose
from readonly.bearNecessities import *
```

```
# Отредактируйте эту ячейку.

# В этой функции вы вернете матрицу преобразования T,
# построив ее из ортонормированного базиса набора E, который вы создаете
# из «базиса медведя»
# и матрицы преобразования в координаты зеркала TE.
def build_reflection_matrix(bearBasis) :
# Параметр bearBasis — это матрица 2x2, которая передается функции.
# Используйте функцию gsBasis на bearBasis, чтобы получить ортонормированный
# базис зеркала.
    E = ???
    # Записать матрицу в форме компонент, которая выполняет зеркальное
    # отражение в базисе зеркала.
    # Напомним, зеркало работает, меняя знак последнего компонента вектора.
    # Заменить a,b,c,d соответствующими значениями
    TE = np.array([[a, b],
                   [c, d]])
    # Объединить матрицы E и TE, чтобы создать матрицу преобразования.
    T = ???
    # Наконец, возвращаем результат. Нет необходимости менять эту строку.
    return T
```

Лабораторная работа «Процесс Грам-Шмидта»

В этом задании вы напишете функцию для выполнения процедуры Грама-Шмидта, которая берет список векторов и образует ортонормированный базис из этого набора. Как следствие, процедура позволяет нам определить размерность пространства, охватываемого базисными векторами, которое равно или меньше пространства, в котором находятся векторы. Вы начнете с завершения функции для 4 базисных векторов, прежде чем обобщать, когда задано произвольное количество векторов. Структура для функции уже написана. Посмотрите код, и вы узнаете, где внести изменения. Мы сделаем первые две строки, и вы можете использовать это как руководство, чтобы сделать последние две.

```
# GRADED FUNCTION
import numpy as np
import numpy.linalg as la

verySmallNumber = 1e-14 # That's 1×10⁻¹⁴ = 0.00000000000001

#
Наша первая функция будет выполнять процедуру Грамма-Шмидта для 4 базисных векторов.
# Мы возьмем этот список векторов в качестве столбцов матрицы A.
# Затем мы рассмотрим векторы по одному и установим их ортогональными.
# На все векторы, которые были до этого. До нормализации.
# Следуйте инструкциям внутри функции при каждом комментарии.
# Вам будет сказано, куда добавить код для завершения функции.
def gsBasis4(A) :
    B = np.array(A, dtype=np.float_)# Сделать копию A, вектор B, так как мы изменим его значения.
# Нулевой столбец прост, поскольку у него нет других векторов, чтобы сделать его нормальным.
# Все, что нужно сделать, это нормализовать его. То есть, разделить на его модуль, или норму.
    B[:, 0] = B[:, 0] / la.norm(B[:, 0])
```

```
# Для первого столбца нам нужно вычесть любое перекрытие с нашим новым нулевым вектором.
B[:, 1] = B[:, 1] - B[:, 1] @ B[:, 0] * B[:, 0]
# Если что-то осталось после этого вычитания, то B[:, 1] и B[:, 0] линейно независимы
# В этом случае мы можем их нормализовать. Иначе мы заменим этот вектор нулями
if la.norm(B[:, 1]) > verySmallNumber :
    B[:, 1] = B[:, 1] / la.norm(B[:, 1])
else :
    B[:, 1] = np.zeros_like(B[:, 1])
# Теперь надо повторить этот процесс для второй колонки
# Вставьте две строки кода: первая вычитает перекрытие с нулевым вектором,
# а вторая вычитает перекрытие с первым


# Снова нужно нормализовать наш новый вектор
# Копируйте фрагмент нормализации и адаптируйте его ко второй колонке




# Наконец, третья колонка
# вставьте код, вычитающий перекрытие с первыми тремя векторами



# Нормализуйте, если это возможно




# Наконец, возвращаем результат
return B
```

Тема 5. Собственный вектор, собственное значение.

Тест «Характеристические полиномы, собственные значения и собственные векторы»

Для заданной матрицы $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ можно вычислить ее собственные значения, решив характеристический полином $\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)=0$

В этом тесте вы будете практиковаться в вычислении и решении характеристического полинома, чтобы найти собственные значения простых матриц.

Вопрос 1.

Найдите характеристический полином и его значения для матрицы $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

- ○ $\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0 \quad \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$
- ○ $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2.$
- ○ $\lambda^2 - 3\lambda - 2 = 0 \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$
- ● $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \quad \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$

Тест «Диагонализация»

Вопрос 1

Для матрицы $T = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ и матрицы изменения базиса $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (столбцы которой являются собственными векторами T), вычислить диагональную матрицу $D = C^{-1}TC$.

○ $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ ○ $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ○ $\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$ ○ $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Вопрос 2

Для матрицы $T = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ и матрицы изменения базиса $C = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ (столбцы которой являются собственными векторами *T*), вычислить диагональную матрицу $D = C^{-1}TC$.

○ $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ○ $\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ○ $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ○ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

Тест «Собственные векторы и собственные значения матриц»

Этот тест проверит вашу способность применять ваши знания о собственных значениях и собственных векторах в некоторых особых случаях.

Используйте следующие блоки кода. Они вычисляют собственные векторы и собственные значения соответственно:

```
# Eigenvalues
L = np.array([[0, 0, 0, 1],
          [1, 0, 0, 0],
          [0, 1, 0, 0],
          [0, 0, 1, 0]
          ])
L1 = np.array([[0.1, 0.1, 0.1, 0.7],
          [0.7, 0.1, 0.1, 0.1],
          [0.1, 0.7, 0.1, 0.1],
          [0.1, 0.1, 0.7, 0.1]
          ])
M = np.array([[4, -5, 6],
          [7, -8, 6],
          [3/2,-1/2,-2]
          ])
vals, vecs = np.linalg.eig(L1)
print(vals)
print(vecs)
# Eigenvectors - Note, the eigenvectors are the columns of the output.
M = np.array([[4, -5, 6],
          [7, -8, 6],
          [3/2, -1/2, -2]])
vals, vecs = np.linalg.eig(M)
vecs
```

Вопрос 1

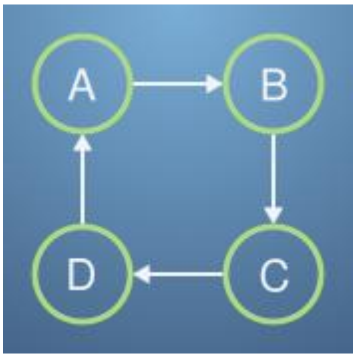
Чтобы попрактиковаться, выберите все собственные векторы матрицы $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 6 \\ 7 & -8 & 6 \\ 3/2 & -1/2 & -2 \end{bmatrix}$

☐ $\begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} -2/\sqrt{9} \\ -2/\sqrt{9} \\ 1/\sqrt{9} \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$

☐ Ни один из перечисленных

Вопрос 2

Вспомните из лабораторной PageRank, что в PageRank мы находили собственный вектор матрицы ссылок L, который имеет собственное значение 1, и что мы можем найти его с помощью метода итерации возведения в степень, и это будет наибольшее собственное значение. Иногда алгоритм PageRank может столкнуться с проблемой зацикливания ссылок. Упрощенный пример может выглядеть так:



С матрицей ссылок $L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ Используйте калькулятор в начале теста, чтобы проверить собственные значения и векторы для этой системы. Что может пойти неправильно? Выбрать все подходящие ответы.

☐ Другие собственные значения не малы по сравнению с 1 и поэтому не затухают при каждой итерации возведения в степень

☐ Некоторые из собственных векторов комплексны

☐ Система слишком мала.

☐ Из-за цикла прокрастинаторы, которые просматривают ссылки, будут крутиться в цикле, а не оседать на веб-странице.

☐ Ни один из этих вариантов

Лабораторная работа «Ранжирование web-страниц»

Алгоритм PageRank (разработанный Ларри Пейджем и Сергеем Брином) произвел революцию в веб-поиске, создав ранжированный список веб-страниц на основе ссылок в сети. PageRank основан на идеальном случайном веб-серфере, который, достигнув страницы, переходит на следующую страницу, нажимая на ссылку. Серфер имеет равную вероятность щелкнуть по любой ссылке на странице и, достигнув страницы без ссылок, имеет равную вероятность перехода на любую другую страницу, введя ее URL. Кроме того, пользователь может иногда выбрать произвольный URL-адрес, а не переходить по ссылкам на странице. PageRank - это ранжированный порядок страниц от наиболее вероятной до наименее вероятной страницы, которую будет просматривать серфер.

```
# Загружаем библиотеки.
%pylab notebook
import numpy as np
import numpy.linalg as la
from readonly.PageRankFunctions import *
np.set_printoptions(suppress=True)
```

PageRank как задача линейной алгебры. Давайте представим микроинтернет, в котором всего 6 веб-сайтов (Avocado, Bullseye, CatBabel, Dromeda, eTings и FaceSpace). Каждый веб-сайт ссылается на некоторые другие, и это формирует сеть.

Принцип PageRank заключается в том, что важные сайты будут связаны с важными сайтами.
Этот несколько рекурсивный принцип сформирует основу нашего мышления.

Представьте, что в нашем микро-интернете 100 web-сеферов, (назовем их прокрастинаторами), каждый из которых просматривает один веб-сайт в один момент времени. Каждую минуту они переходят по ссылке на своем сайте на другой сайт в микро-интернете. Через некоторое время на сайтах, на которые больше всего ссылаются, будет больше посещений, и, в конечном счете, каждую минуту для каждого прокрастинатора, покидающего веб-сайт, будет добавляться другой, сохраняя общее количество посетителей на каждом сайте постоянным. PageRank - это просто ранжирование веб-сайтов по количеству посетителей на них в конце этого процесса.

Представим количество прокрастинаторов на каждом сайте в виде вектора:

$$r = \begin{bmatrix} r_A \\ r_B \\ r_C \\ r_D \\ r_E \\ r_F \end{bmatrix}$$

И скажем, что количество посетителей на каждом сайте в момент $i+1$ связано с количеством в момент i по матричной трансформации $\mathbf{r}^{(\mathbf{i+1})} = L\ \mathbf{r}^{(\mathbf{i})}$ с матрицей L,имеющей вид:

$$L = \begin{bmatrix} L_{A\to A} & L_{B\to A} & L_{C\to A} & L_{D\to A} & L_{E\to A} & L_{F\to A} \\ L_{A\to B} & L_{B\to B} & L_{C\to B} & L_{D\to B} & L_{E\to B} & L_{F\to B} \\ L_{A\to C} & L_{B\to C} & L_{C\to C} & L_{D\to C} & L_{E\to C} & L_{F\to C} \\ L_{A\to D} & L_{B\to D} & L_{C\to D} & L_{D\to D} & L_{E\to D} & L_{F\to D} \\ L_{A\to E} & L_{B\to E} & L_{C\to E} & L_{D\to E} & L_{E\to E} & L_{F\to E} \\ L_{A\to F} & L_{B\to F} & L_{C\to F} & L_{D\to F} & L_{E\to F} & L_{F\to F} \end{bmatrix},$$

где столбцы представляют вероятность перехода с одного веб-сайта на любой другой веб-сайт и в сумме составляют единицу. Строки определяют, какова вероятность того, что вы заходите на веб-сайт с любого другого, и для них не нужна суммарная вероятность, равная единице.

При долговременном выполнении получится $r^{(i+1)} = r^{(i)}$, так что мы отбросим верхние индексы, что позволяет нам записать так: $L\ \mathbf{r} = \mathbf{r}$ хто является уравнением собственного значения матрицы L.

Заполните матрицу L ниже, мы оставили в колонке, на которые веб-сайт FaceSpace (F) ссылается. Помните, что это вероятность перехода на другой веб-сайт из этого, так что каждый столбец должен суммироваться в единицу (путем деления на количество ссылок).

```
# Замените ??? на вероятности перехода по ссылке на каждый веб-сайт при выходе из веб-сайта F (FaceSpace).
L = np.array([[0,   1/2, 1/3, 0, 0,   ? ],
              [1/3, 0,   0,   0, 1/2, ? ],
              [1/3, 1/2, 0,   1, 0,   ? ],
              [1/3, 0,   1/3, 0, 1/2, ? ],
              [0,   0,   0,   0, 0,   ? ],
              [0,   0,   1/3, 0, 0,   ? ]])
```

В принципе, мы могли бы, как и раньше, использовать библиотеку линейной алгебры чтобы вычислить собственные значения и векторы. И это будет работать для небольшой системы. Но процесс вычисления становится неуправляемым для больших систем. А так как мы заботимся только о главном собственном векторе (с самым большим собственном значением, который в нашем случае будет равен 1), мы можем использовать метод итерации возведения в степень, который будет хорошо масштабироваться на большие системы.

Используйте код ниже, чтобы найти PageRank для нашего микро-интернета.

```
eVals, eVecs = la.eig(L) # получим собственные значения и векторы
order = np.absolute(eVals).argsort()[::-1] # сортируем их по собсвенным значениям
eVals = eVals[order]
eVecs = eVecs[:,order]

r = eVecs[:, 0] # устанавливаем r в главный собственный вектор
100 * np.real(r / np.sum(r)) # Приводим сумму главного собственного вектора к единице и умнажаем на 100 прокрастинаторов
```

Контрольные задания к экзамену

1 Вариант

Используя формулы и методы теста «Как нарисовать тень объекта с использованием неквадратных матриц», рассчитать матрицу отображения тени 3D объекта на вертикальной стене с переменным вектором направления света.

2 Вариант

Используя формулы и методы, изученные в лабораторной работе «Отражающее пространство», написать программу, отражающую изображение в перевернутом виде.

7.4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Оценка качества освоения дисциплины в ходе текущей и промежуточной аттестации обучающихся осуществляется в соответствии с «Положением о балльно-рейтинговой системе оценки учебных достижений студентов» (приказ ректора от 13.01.2014 № 08-01-01/08).

Результаты текущего контроля подводятся:

- *Задание* – не позднее 6 рабочих дней, после установленного срока сдачи отчетов по лабораторным работам;
- *Тест* – после прохождения теста и выставления статуса «завершен».

Инструментарий системы Moodle для балльного оценивания результатов текущего контроля представлен в таблице 6.

Таблица 6. Оценивание результатов текущего контроля

–	**задание**	**оценка**
Тест	«Исследование пространства параметров»	2
Тест	«Решение систем уравнений»	2
Тест	«Выполнение некоторых операций над векторами»	2
Тест	«Скалярное умножение векторов»	2
Тест	«Изменение базиса».	3
Тест	«Изменение системы отсчета, итоговый тест»	3
Тест	«Использование матриц для преобразования».	3
Тест	«Решение линейных уравнений с использованием обратной матрицы»	3
Тест	«Умножение неквадратных матриц»	3

Тест	«Как нарисовать тень 3D объекта с использованием неквадратных матриц»	3
Задание	**ЛР «Проверка матрицы на сингулярность»**	3
Задание	**ЛР «Отражающее пространство»**	3
Задание	**ЛР «Процесс Грам-Шмидта»**	3
Тест	«Характеристические полиномы, собственные значения и собственные векторы»	5
Тест	«Диагонализация»	4
Задание	**ЛР «ранжирование web-страниц»**	3
Тест	«Итоговый тест. Собственные векторы и собственные значения матриц»	3

Для стимулирования развития творческого и научно-исследовательского потенциала студентов при промежуточном оценивании предусмотрена система дополнительных баллов, а именно:

- Начисление до 10 поощрительных баллов за участие в конференциях, семинарах, выставках и т.п. в области машинного обучения, программировании с представлением индивидуальных проектов в области машинного обучения.

Начисление баллов зависит от статуса мероприятия и статуса участия в нем студента. Начисление баллов происходит при предоставлении диплома, сертификата, грамоты, материалов конференции, опубликованной статьи, тезисов и т.п.

На экзамене студент получает четыре случайным образом выбранных вопроса по всем темам курса, ответ на каждый оценивается в десять баллов и в дополнение один из вариантов задания, успешное выполнение которого оценивается в десять баллов. Затем баллы, полученные им в течении семестра за выполнение и отчет лабораторно-практических работ суммируются с экзаменационными баллами и выставляется итоговое значение.

Баллы, полученные студентами на экзамене, выставляются в Журнал оценок в Moodle, итоговая ведомость формируется автоматически в зависимости от выставленных баллов.

Преподаватель, проводящий обучение по дисциплине (модулю), в зависимости от уровня подготовленности обучающихся может использовать иные формы, методы контроля и оценочные средства, исходя из конкретной ситуации.

8. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

а) Основная литература:

1. Мирзоев М.С., Основы математической обработки информации / М.С. Мирзоев - М. : Прометей, 2016. - 316 с. - ISBN 978-5-906879-01-1 - // ЭБС "Консультант студента": [сайт]. - URL : http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785906879011.html
2. Атапин В. Г. Специальные главы математики : множества, графы, комбинаторика : учеб. пособие / Атапин В. Г. - Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2016. - 83 с. - ISBN 978-5-7782-2882-5. - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785778228825.html
3. Математика. Часть 1 [Электронный ресурс]: учебник / Шабаршина И. С. - Ростов н/Д : Изд-во ЮФУ, 2017. Режим доступа: http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785927524310.html
4. Математика [Электронный ресурс]учебное пособие / С.И. Исаева, Л.В. Кнауб, Е.В. Юрьева - Красноярск : СФУ, 2011. Режим доступа: http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN978763824056.html

б) дополнительная литература

5. Кучер Е. С. Специальные главы высшей математики : учебно-методическое пособие / Кучер Е. С. - Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2017. - 100 с. - ISBN 978-5-7782-3154-2. - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785778231542.html
6. Математика и информатика [Электронный ресурс] : учеб. пособие / С.А. Балашова, И.В. Лазанюк, Н.К. Аникина, Н.М. Баранова, В.И. Дихтяр. - М. : Издательство РУДН, 2009. Режим доступа: http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785209030508.html
7. Математика [Электронный ресурс]справочник / И.И. Баврин - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2017. Режим доступа: http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922117449.html
8. Математика. Практикум [Электронный ресурс]: учеб. пособие / Е.И. Фоминых - Минск : РИПО, 2017. Режим доступа: http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9789855037027.html
9. Петров А. Г. Специальные главы математики: метод электромеханической аналогии : учеб. пособие / А. Г. Петров. - Москва: МИСиС, 2019. - 54 с. Режим доступа: https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785907061255.html

в) ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимый для освоения дисциплины (модуля)

1. Электронно-библиотечная система (ЭБС) ООО «Политехресурс» «Консультант студента». www.studentlibrary.ru.

9. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Для проведения лекционных занятий необходима мультимедийная аудитория, оснащенная компьютерными рабочими местами студентов.

Для проведения лабораторных занятий необходима аудитория, оснащенная компьютерными рабочими местами студентов и доступом в Интернет.

Рабочая программа дисциплины (модуля) при необходимости может быть адаптирована для обучения (в том числе с применением дистанционных образовательных технологий) лиц с ограниченными возможностями здоровья, инвалидов. Для этого требуется заявление обучающихся, являющихся лицами с ограниченными возможностями здоровья, инвалидами, или их законных представителей и рекомендации психолого-медико-педагогической комиссии. Для инвалидов содержание рабочей программы дисциплины (модуля) может определяться также в соответствии с индивидуальной программой реабилитации инвалида (при наличии).